Kodused ülesanded I

3.8.2.
(a) $(B\&D) \supset E_2$
(b) $(B\supset G) \supset (G\supset B)$
(c) $((E_1 \vee E_2 \vee E_3) \supset B\&C) \supset (D\supset A)$

3.8.5.
Lahenduseks tuli koostada parema ja vasaku poole tõeväärtustabelid, mis kõigil kenasti tehtud.

3.8.6.
(a) kontradiktoorne
(b) kontingentne (väär, kui p,q ja r tõeväärtused olid vastavalt 0,1,0)
(c) tautoloogiline

3.8.7.
(a) ei kehti: tõeväärtustabelis tekib olukord, kus eeldused ($B\equiv\neg A$ ja A) on tõesed, aga väide (B) väär (kui A on 1 ja B 0)
(b) kehtib: tõeväärtustabelis ei teki olukorda, kus eeldused ($\neg(A\&B)$ ja A) oleksid tõesed, aga väide ($\neg B$)väär
(c) ei kehti: : tõeväärtustabelis tekib olukord, kus eeldused ($((A\vee B)\vee C)\supset D$ ja $\neg B$) on tõesed, aga väide (D) väär (kui A, B, C ja D kõik on 0)

3.8.8.
vastuseks tuli koostada ‘vasak pool’ $\equiv$ ‘parem pool’ tõeväärtustabel. Kui see on alati tõene, on pooled ekvivalentsed.
(a) jah
(b) ei
(c) jah

4.11.1.
Lugesin siin õigeks sõnalise arutelu ja tõestuse sekventsarvutuses. Tõeväärtustabeleid ei saa predikaatarvutuses kasutada.

(a) $\forall x\neg(Fx \& Gx)$ (kui kehtib iga x korral, siis ka konkreetse a korral) =>
$\neg(Fa \& Ga) \Leftrightarrow \neg Fa \vee \neg Ga$ (vähemalt üks neist peab kehtima)
Kuna aga Fa, siis $\neg Ga$

(b) $\exists x\, (Px \& Rx)$ (tähistame selle x a-ga) => Pa & Ra
$\neg\exists x(Px \& Qx) \Leftrightarrow \forall x\, (\neg Px \vee \neg Qx)$ (kui kehtib iga x korral, siis ka konkreetse a korral => $\neg Pa \vee \neg Qa$ (vähemalt üks neist peab kehtima)
Kui aga Pa & Ra, siis saab tõene olla ainult $\neg Qa$.
Seega $Ra \& \neg Qa \Leftrightarrow \exists x\, (Rx \& \neg Qx)$

(c) $\forall x\, (Px \supset Qx)$ (kui kehtib iga x korral, siis ka konkreetse a korral) =>
$Pa \supset Qa$ ja tänu 2.eeldusele seega Qa ning
tänu 3.eeldusele $Ra \& Qa \Leftrightarrow \exists x\, (Px \& Qx)$

4.11.5.
(a) $x\geq 0$: $\exists y\, (x = y\cdot y)$ (negatiivsest reaalarvust ei saa võtta reaalarvulist juurt)

(b) $x \leq y$: $\exists z\ (y = z+x)\ \&\ \exists w\ (z = w \cdot w)$ (leidub mittenegatiivne arv, mille liitmisel x-le saame y)
(c) $x<y$: $\exists z\ (y = z+x)\ \&\ \exists w\ (z = w \cdot w)\ \&\ \neg(x=y)$

4.11.6.
(a) $X = \varnothing$: $\forall A\ (X \subseteq A)$
(b) $X = N$: $\forall A\ (A \subseteq X)$
(c) $X \cup Y = Z$: $\forall A\ (A \subseteq X \vee A \subseteq Y) \equiv A \subseteq Z$
(d) $X \cap Y = Z$: $\forall A\ (A \subseteq X\ \&\ A \subseteq Y) \equiv A \subseteq Z$
(e) $X \cup (Y \cap Z) = V$: $\forall A\ (A \subseteq X \vee (A \subseteq Y\ \&\ A \subseteq Z)) \equiv A \subseteq V$
(f) $X \cap Y = \varnothing$: $\forall A\ (((A \subseteq X) \supset \neg(A \subseteq Y))\ \&\ ((A \subseteq Y) \supset \neg(A \subseteq X)))$
(g) $\forall A\ (((A \subseteq X) \supset \neg(A \subseteq Y))\ \&\ ((A \subseteq Y) \supset \neg(A \subseteq X)))\ \&\ (\forall B\ (B \subseteq X \vee B \subseteq Y) \supset B \subseteq Z)$ $\&\forall C\ (C \subseteq Z)$ (ühisosa on tühi ja ühend on kogu N)
(h) $\forall A\ (A \subseteq X\ \& \neg(A \subseteq Y)) \equiv A \subseteq Z$
(i) $\forall Y\ \forall Z\ (Y \subseteq X\ \&\ Z \subseteq X \supset (Y = Z \vee (\forall A\ Y \subseteq A) \vee (\forall A\ Z \subseteq A)$

4.11.8.
(a) $\forall x\ (A(x) \equiv B(x))$
(b) $\forall x\ (A(x) \supset B(x))$
(c) $\forall x\ ((A(x) \supset B(x))\ \&\ \exists y\ (\neg A(y)\ \&\ B(y))$
(d) $\forall x\ ((A(x) \vee (B(x)) \equiv C(x))$
(e) $\forall x\ ((A(x)\ \&\ (B(x)) \equiv C(x))$
(f) $\forall x\ ((A(x)\ \&\ \neg(B(x)) \equiv C(x))$

Kodused ülesanded II

1. Tõesta sekventsarvutuses valemid:

a) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A;\cdot \to \cdot;A,B}\,\text{hyp}}{A;\cdot \to A;B}\,L\text{R} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A,B;\cdot \to \cdot;B}\,\text{hyp}}{A;B \to \cdot;B}\,L\text{L},}{A;A \supset B \to \cdot;B}\,\supset\text{L}$$

$$\dfrac{A;A \supset B \to \cdot;B}{A,A \supset B;\cdot \to \cdot;B}\,L\text{L}$$

$$\dfrac{A,A \supset B;\cdot \to \cdot;B}{A,A \supset B;\neg B \to \cdot;\cdot}\,\neg\text{L},\ L\text{R}$$

$$\dfrac{A,A \supset B;\neg B \to \cdot;\cdot}{A \supset B;\neg B \to \neg A;\cdot}\,\neg\text{R},\ L\text{L}$$

$$\dfrac{A \supset B;\neg B \to \neg A;\cdot}{\cdot;A \supset B \to \neg B \supset \neg A;\cdot}\,L\text{L},\ \supset\text{R}$$

$$\dfrac{\cdot;A \supset B \to \neg B \supset \neg A;\cdot}{\cdot;\cdot \to (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}\,\supset\text{R}$$

b) $(A \supset B) \wedge (A \wedge B \supset C) \supset (A \supset C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A,B;\cdot \to \cdot;A,C}\,\text{hyp} \qquad \dfrac{}{A,B;\cdot \to \cdot;B,C}\,\text{hyp}}{A,B;\cdot \to A \wedge B;C}\,\wedge\text{L},L\text{R} \qquad \dfrac{}{A,B,C;\cdot \to \cdot;C}\,\text{hyp}}{A,B;A \wedge B \supset C \to \cdot;C}\,\supset\text{L},L\text{L}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{A;A \wedge B \supset C \to \cdot;A,C}\,\text{hyp} \qquad A,B;A \wedge B \supset C \to \cdot;C}{A;A \supset B,A \wedge B \supset C \to \cdot;C}\,\supset\text{L}$$

$$\dfrac{A;A \supset B,A \wedge B \supset C \to \cdot;C}{A;(A \supset B) \wedge (A \wedge B \supset C) \to C;\cdot}\,\wedge\text{L},\ L\text{R}$$

$$\dfrac{A;(A \supset B) \wedge (A \wedge B \supset C) \to C;\cdot}{\cdot;(A \supset B) \wedge (A \wedge B \supset C) \to A \supset C;\cdot}\,\supset\text{R},\ L\text{L}$$

$$\dfrac{\cdot;(A \supset B) \wedge (A \wedge B \supset C) \to A \supset C;\cdot}{\cdot;\cdot \to (A \supset B) \wedge (A \wedge B \supset C) \supset (A \supset C);\cdot}\,\supset\text{R}$$

(Järgmised kaks olid sattunud failiga kaasa juhuslikult, lisan siiski nende lahendused).

2. Kontrollida Davis-Putnami meetodiga, et järgmine klauslite hulk on vastuoluline:

$p \vee \neg q \vee r,\ q \vee r,\ \neg p \vee r,\ q \vee \neg r,\ \neg q,\ s \vee \neg q \vee \neg r$

eemaldame viimase klausli, kuna s on puhas literaal

$p \vee \neg q \vee r,\ q \vee r,\ \neg p \vee r,\ q \vee \neg r,\ \neg q$

klauslite hulgas on ühikklausel, seega rakendame $[\perp/q]$ ja saame

$r,\ \neg p \vee r,\ \neg r$

esimene ja kolmas klausel annavad vastuolu

3. Näita resolutsioonimeetodiga, kas järgmine klauslite hulk on kehtestatav või vastuoluline:

$\{p \vee \neg q, p \vee r, \neg q \vee r, \neg p \vee q, q \vee \neg r, \neg p \vee \neg r\}$

$p \vee \neg q$ (1)
$p \vee r$ (2)
$\neg q \vee r$ (3)
$\neg p \vee q$ (4)
$q \vee \neg r$ (5)
$\neg p \vee \neg r$ (6)

1,5 : $p \vee \neg r$ (7)
2,7: p (8)
3,4 : $\neg p \vee r$ (9)
2,9: $\neg p$ (10)
8,10 : vastuolu

4. Olgu meil sellised faktid:

- on olemas lohe (L)
- lohe kas magab oma koopas (M) või kütib metsas (K)
- kui lohe on näljane (N), siis ei saa ta magada
- kui lohe on väsinud (V), siis ei saa ta küttida

Vormistage see konjuktiivsel normaalkujul valemiks (so disjunktide hulgaks) ja otsige vastused küsimustele:

- mida teeb lohe siis, kui ta on näljane
- mida teeb lohe siis kui ta on näljane ja väsinud

(küsimustele vastamiseks kasutage eeldust: kui x ei saa teha toimingut y, siis x ei tee y)

Ehk siis faktid on:
L
$M\&\neg K \vee \neg M\&K$ $(\Leftrightarrow (\neg M \vee \neg K)\ \&\ (M \vee K))$
$N \Rightarrow \neg M$ $(\Leftrightarrow \neg N \vee \neg M)$
$V \Rightarrow \neg K$ $(\Leftrightarrow (\neg V \vee \neg K))$
Ehk siis saime kokku 5 klauslit:
$L, \neg M \vee \neg K, M \vee K, \neg N \vee \neg M, \neg V \vee \neg K$

Esiteks,
N, 2 : $\neg M$ (6)
6, 3 : K (7)
Ehk: kui lohe on näljane, siis ta kütib metsas.
Teiseks,
V, 5 : $\neg K$ (8)
7,8: vastuolu
Ehk siis lohe ei saa olla korraga väsinud ja näljane.

Kodused Ülesanded III

1. mgu(p(f(y), w, g(z)), p(u, u, v)) = {w/f(y), u/f(y), v/g(z)} : p(f(y), f(y), g(z))
   mgu(p(f(y), w, g(z)), p(v, u, v)) ei eksisteeri
   mgu(p(a, x, f(g(y))), p(z, h(z, w), f(w))) = {z/a, x/h(z, w), w/g(y)} :
   p(a, h(a,g(y)), f(g(y)))

2. Kontrolli resolutsiooniga, et valemitest

$\forall x(\forall y(child(y, x) \supset fly(y)) \wedge dragon(x) \supset happy(x))$
$\forall x(green(x) \wedge dragon(x) \supset fly(x)))$
$\forall x(\exists y(parent(y, x) \wedge green(y)) \supset green(x))$
$\forall z \forall x(child (x, z) \wedge dragon(z) \supset dragon(x))$
$\forall x \forall y(child (y, x) \supset parent(x, y))$

järeldub valem

$\forall x(dragon(x) \supset (green(x) \supset happy(x)))$

Esmalt tuleb teisendada valemid klauselkujule.

1) $\forall x (\forall y(child(y, x) \supset fly(y)) \wedge dragon(x) \supset happy(x))$
$\forall x(\forall y(\neg child(y,x) \vee fly(y)) \wedge dragon(x) \supset happy(x))$
$\forall x(\neg\exists y (child(y,x) \wedge \neg fly(y)) \wedge dragon(x) \supset happy(x))$
$\forall x((\neg (child(f(x),x) \wedge \neg fly(f(x))) \wedge dragon(x) \supset happy(x))$
$\forall x((\neg(\neg child(f(x),x) \vee fly(f(x)) \wedge dragon(x)) \vee happy(x))$
$\forall x(child(f(x),x) \wedge \neg fly(f(x)) \vee \neg dragon(x) \vee happy(x))$
$child(f(x),x) \wedge \neg fly(f(x)) \vee \neg dragon(x) \vee happy(x)$
$(child(f(x),x) \vee \neg dragon(x) \vee happy(x)) \wedge (\neg fly(f(x)) \vee \neg dragon(x) \vee happy(x))$

2) $\forall x(green(x) \wedge dragon(x) \supset fly(x)))$
$\neg(green(x) \wedge dragon(x)) \vee fly(x)$
$\neg green(x) \vee \neg dragon(x) \vee fly(x)$

3) $\forall x(\exists y(parent(y, x) \wedge green(y)) \supset green(x))$
$\forall x \forall y (parent(y,x) \wedge green(y) \supset green(x))$
$parent(y,x) \wedge green(y) \supset green(x)$
$\neg(parent(y,x) \wedge green(y)) \vee green(x)$
$\neg parent(y,x) \vee \neg green(y) \vee green(x)$

4) $\forall z\forall x(child (x, z) \wedge dragon(z) \supset dragon(x))$
$\neg(child(x,z) \wedge dragon(z)) \vee dragon (x)$
$\neg child(x,z) \vee \neg dragon(z) \vee dragon(x)$

5) $\forall x \forall y(child (y, x) \supset parent(x, y))$
$\neg child(y,x) \vee parent(x,y)$

Järelduv valem:
$\forall x(dragon(x) \supset (green(x) \supset happy(x)))$
$\forall x(dragon(x) \supset (\neg green(x) \vee happy(x)))$
$\forall x(\neg dragon(x) \vee \neg green(x) \vee happy(x))$
$\neg dragon(x) \vee \neg green(x) \vee happy(x)$
Eitusest
$dragon(x) \wedge green(x) \wedge \neg happy(x)$

1 $child(f(x),x) \vee \neg dragon(x) \vee happy(x)$
2 $\neg fly(f(x)) \vee \neg dragon(x) \vee happy(x)$
3 $\neg green(x) \vee \neg dragon(x) \vee fly(x)$
4 $\neg parent(y,x) \vee \neg green(y) \vee green(x)$
5 $\neg child(x,z) \vee \neg dragon(z) \vee dragon(x)$
6 $\neg child(y,x) \vee parent(x,y)$
7 $dragon(x)$
8 $green(x)$
9 $\neg happy(x)$

Võimalusi siit tuletada on mitmeid.
Üks võimalusi:

1,9	(10) $child(f(x),x) \vee \neg dragon(x)$
10, 6	(11) $\neg dragon(x) \vee parent(x, f(x))$
11, 4	(12) $\neg dragon(x) \vee \neg green(x) \vee green(f(x))$
12, 3	(13) $\neg dragon(x) \vee \neg green(x) \vee \neg dragon(f(x)) \vee fly(f(x))$
13, 2	(14) $\neg green(x) \vee \neg dragon(f(x)) \vee \neg dragon(x) \vee happy(x)$
14,7,8,9	(15) $\neg dragon(f(x))$
15, 5	(16) $\neg child(f(x),z) \vee \neg dragon(z)$
16, 7	(17) $\neg child(f(x),x)$
17, 10	(18) $\neg dragon(x)$
18, 7	tühi klausel

(lineaarresolutsioon)

3. Kontrolli resolutsiooni kasutades, et järgmine valem on üldkehtiv:

$$(a = b \vee a = c) \wedge (a = b \vee c = b) \wedge (p(a) \vee p(b)) \supset (p(a) \wedge p(b))$$

1 $a = b \vee a = c$
2 $a = b \vee c = b$
3 $p(a) \vee p(b)$
4 $\neg (p(a) \wedge p(b)) = \neg p(a) \vee \neg p(b)$

Jällegi on mitu võimalust.

1,4	(5) $\neg p(b)$
3,5	(6) $p(a)$
2,6	(7) $p(b)$
5,7	vastuolu

seega valem üldkehtiv.